Оригинальная статья/Original article

УДК 519.81

DOI: http://doi.org/10.20914/2310-1202-2016-2-60-64

Построение минимального доминирующего множества при проектировании Wi-Fi-сети

Юрий В. Бугаев, [1] y_bugaev52@mail.ru
Светлана Н. Черняева, [1] chernsv1978@gmail.com
Оксана Ю. Ойцева, [1] oou@live.ru
Артем И. Коробов [1] korobovartyom13@gmail.com

[1] кафедра информационных технологий моделирования и управления, Воронеж. гос. ун-т инж. техн., пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394000, Россия

Реферат. В настоящее время технология беспроводной передачи данных становится предпочтительной, а в некоторых случаях единственно возможной для коммуникации информационных устройств. При необходимости охвата сетью большого пространства со сложной конфигурацией возникает необходимость рационально разместить несколько Wi-Fi излучателей, обеспечивающих устойчивую связь с каждой точкой возможного расположения приёмника сигналов. Тогда задача размещения Wi-Fi излучателей может быть сформулирована как определение дискретного множества точек размещения излучателей, удовлетворяющего условию. Иначе, необходимо определить положения всех излучателей, полностью покрывающих заданную территорию, причём количество излучателей должно быть минимально. В такой постановке это задача о наименьшем покрытии – поиск наименьшего множества столбцов матрицы, «покрывающих» все её строки. С точки зрения постановки задачи о наименьшем покрытии, возможны два случая конфигурации области охвата окружающего пространства Wi-Fi излучателями: 1. Безвариативный. Его особенность состоит в том, что зона покрытия полностью определяется точкой размещения излучателя. Это возможно в том случае, когда зона охвата симметрична или ориентация диаграммы направленности излучения строго фиксирована. В этом случае можно построить граф, ассоциированный с набором точек размещения излучателей, в котором каждой точке размещения ставятся в соответствие смежные вершины. В такой постановке мы приходим к задаче о наименьшем доминирующем множестве графа. 2. Вариативный. Он имеет место в том случае, когда диаграммы излучения направлена, и зона охвата может меняться в зависимости от ориентации излучателя. То есть реальный излучатель можно развернуть в бесконечное количество различных положений, однако конечность охватываемых точек существенно ограничивает число различных ориентаций. В этом случае каждой точке положения излучателя можно поставить в соответствие несколько строк матрицы и каждой покрываемой точке будет соответствовать ровно один столбец.

Ключевые слова: Wi-Fi сеть; алгоритм бинарного программирования; задача о наименьшем покрытии

Construction of the minimal dominating set in the design of Wi-Fi-network

Yuri V. Bugaev, [1] y_bugaev52@mail.ru
Svetlana N. Chernyaeva, [1] chernsv1978@gmail.com
Oksana Y. Oytceva, [1] oou@live.ru
Artem I. Korobov [1] korobovartyom13@gmail.com

[1] information simulation technology and management department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394000, Rus-sia

Summary. Currently, wireless technology is becoming the preferred, and in some cases the only possible for the information communication devices. If you need coverage of a large space with a complex configuration arises the need to efficiently host multiple Wi-Fi emitters, providing a stable connection with each possible location of the receiver signals. Suppose we have a model that allows to determine the coverage of a stable connection Wi-Fi emitter at a given spatial point. Then the problem of locating Wi-Fi emitters can be formulated as determining a discrete set of locations of transducers satisfying the condition. Otherwise, it is necessary to determine the positions of all the emitters that completely cover a given area, and the number of emitters should be minimal. In this formulation it is the task of the lowest coverage – the problem of finding the smallest set of columns of the matrix, "covering" all of her lines. To develop methods for solving a problem of the smallest covering usually resort to its matrix interpretation, which reduces to the problem of the smallest dominating set of a graph. From the point of view of the formulation of the problem of the smallest covering two cases are possible configuration of the coverage area of the surrounding space Wi-Fi emitters: 1. without variable. Its peculiarity is that the coverage area is completely defined by the location of the emitter. It is possible in the case where the coverage area of the symmetric or the orientation of the directivity diagram of the radiation is fixed. In this case it is possible to build a graph associated with the set of locations of emitters in which each point of placement are associated with adjacent vertices. In this formulation we arrive at the problem of the smallest dominating set of a graph. 2. Variable. It takes place in the case when the diagram of radiation is directed, and the coverage area may vary depending on the orientation of the emitter. That is, the actual emitter can be deployed in an infinite number of different provisions, but the limb covered points significantly limits the number of different orientations. In this case, each point position of the transmitter can be put into correspondence with several matrix rows and cover each point will correspond to exactly one column.

Keywords: Wi-Fi-network; the algorithm for binary programming; task about the least coverage

Для цитирования

Бугаев Ю. В., Черняева С. Н., Ойцева О. Ю., Коробов А. И. Построение минимального доминирующего множества при проектировании Wi-Fi-сети // Вестник ВГУИТ. 2016. № 2. С 60–64. doi:10.20914/2310-1202-2016-2-60-64.

For citation

Bugaev Y. V., Chernyaeva S. N., Oytceva O. Y., Korobov A. I. Construction of the minimal dominating set in the design of Wi-Fi-network. *Vestnik VSUET* [Proceedings of VSUET]. 2016. no. 2. pp. 60–64. (in Russ.). doi:10.20914/2310-1202-2016-2-60-64.

Введение

В современном мире технология беспроводной передачи данных становится предпочтительной, а в некоторых случаях и единственно возможной для коммуникации информационных устройств. Все более востребованной становится беспроводная связь в зонах большой плотности клиентов. Требуется эффективное использование радиоспектра и правильное проектирование сети.

На рисунке 1 представлена контекстная диаграмма процесса проектирования и построения беспроводных сетей. Одним из ключевых компонентов представленной диаграммы являются данные о зоне и площади покрытия территории, охваченной Wi-Fi-сетью. Если стоит задача в охвате сетью большого пространства со сложной конфигурацией возникает необходимость рационально разместить несколько Wi-Fi-излучателей, которые позволят обеспечить устойчивую связь с каждой точкой возможного расположения приёмника сигналов.

В результате получаем достаточно сложную комбинаторную задачу, решению которой посвящена эта работа.

Рисунок 1. Контекстная диаграмма процесса проектирования и построения беспроводной сети

Figure 1. Designing and constructing of wireless network process context diagram

Постановка задачи и вопросы тестирования алгоритма её решения

Изначально будем предполагать, что в нашем распоряжении имеется модель, позволяющая определить зону охвата устойчивой связью Wi-Fi-излучателем при заданной пространственной точке его размещения. Разработка такой модели также представляет собой сложную задачу, но решается она совсем иными методами и выходит за рамки предлагаемой работы. Обозначим:

$S(x)$ – область пространства, охваченная излучателем, помещённым в точку x;

T – территория, подлежащая охвату.

Тогда задача формулируется следующим образом: определить дискретное множество $D \subset T$ точек размещения излучателей, удовлетворяющего условию

$$\begin{gathered} |D| \to \min \\ T \subseteq \bigcup_{x \in D} S(x) \end{gathered} \qquad (1)$$

Иными словами, необходимо определить положения всех излучателей, полностью покрывающих заданную территорию, причём количество излучателей должно быть минимально.

Очевидно, что, полагая T непрерывным множеством пространственных точек, мы получаем совершенно неподъёмную многомерную вариационную задачу, поэтому упростим её, перейдя к дискретной аппроксимации. Для этого достаточно допустить, что T и $S(x)$ представляют собой дискретные множества неких опорных точек, расположенных на заданной территории. В такой постановке мы получим хорошо известную *задачу о наименьшем покрытии* (ЗНП), которая в теоретико-множественной интерпретации имеет следующую формулировку [1]. Даны множество $T = \{t_1, \ldots t_M\}$ и семейство $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ подмножеств $S_j \subset T$. Каждому S_j поставлена в соответствие положительная стоимость c_j. Необходимо определить подсемейство $\{S_1, \ldots, S_n\} \subset \mathrm{S}$, такое, что $T \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} S_{k_i}$ и при этом суммарная стоимость подсемейства $\sum_{i=1}^{m} c_{k_i}$ минимальна.

Для разработки методов решения ЗНП обычно прибегают к её матричной интерпретации, которая состоит в следующем. Дана матрица A, состоящая из 0 и 1, размера $m \times n$, в общем случае $m \neq n$, и набор положительных стоимостей c_j, $j = 1, \ldots n$ каждого столбца. Необходимо найти такое наименьшее множество S столбцов матрицы, при котором каждая строка матрицы содержала 1 хотя бы в одном из выбранных столбцов и сумма их стоимостей была минимальна.

Если A квадратная, её транспонированную матрицу A^T можно интерпретировать как матрицу смежности некоторого графа. В случае когда в A на главной диагонали стоят 1, а все $c_j = 1$ ЗНП сводится к задаче о *наименьшем доминирующем множестве* (ДМ) графа.

Доминирующее или *внешне устойчивое* множество графа $G = (V, E)$ – такое множество U вершин, что любая вершина из $V \setminus U$ смежна с какой-нибудь вершиной из U. Иными словами $\forall u \in V \setminus U \ \exists \ v \in U$: $(v, u) \in E$. ДМ называется *минимальным*, если его подмножество уже не является доминирующим. ДМ называется *наименьшим*, если среди всех доминирующих множеств оно обладает наименьшей мощностью.

Задача о наименьшем ДМ практически во всех модификациях относится к классу *NP*-полных задач, исключение – построении наименьшего ДМ для дерева [1]. Лучший из комбинаторных методов решения общей ЗНП и пригодный для поиска наименьшего ДМ описан в[1]. Однако эффективность его невелика, максимальное число строк в матрице 30–40 элементов.

Более эффективны на практике методы ветвей и границ, основанные на булевской интерпретации ЗНП: минимизировать $z = \sum_j c_j x_j$ при ограничениях:

$$\sum_j A_{ij} x_j \geq 1 \quad \forall i = 1,...,m, \qquad (2)$$

где $x_j = 1$, если j-й столбец включён в S, и $x_j = 0$ в противном случае.

Соответствующая программа bintprog входит в состав функций пакета оптимизации Optimization Toolbox системы Matlab. Её проверка на тестовых примерах построения наименьшего ДМ для графов, структура которыхсоответствует задаче (1) показала её высокое быстродействие для графов с числом вершин не более 40. В некоторых случаях она позволяет решать за приемлемое время задачи значительно более высокой размерности, однако стабильность её работы оставляет желать лучшего. Это говорит о необходимости искать более быстродействующие приближённые алгоритмы.

Подробный обзор методов решения различных вариантов ЗНП и соответствующих тестовых примеров приведён в [2]. Для решения ЗНП предложено большое число точных алгоритмов, основанных на методе ветвей и границ, отсечения, перебора *L*-классов и др. Однако теоретические оценки вычислительной сложности этих методов сопоставимы со сложностью переборных алгоритмов. Это говорит о том, что выход следует искать в создании приближённых методов.

Согласно имеющейся классификации, множество тестовых задач можно разбить на три основные группы: задачи специальной структуры, прикладные задачи и задачи со случайными исходными данными. Однако структура приведённых в [2] задач первой и второй групп мало похожа на задачу (1) об охвате территории Wi-Fi-сетью. А что касается третьей группы, то в задаче (1) A^T должна быть матрицей смежности связного графа, чего нельзя гарантировать при случайной генерации матрицы.

Таким образом, для тестирования алгоритма решения задачи (1) надо создавать специальные задачи. На наш взгляд, помимо практических задач, для которых точное решение неизвестно, наиболее подходят популярные задачи-головоломки, связанные с покрытиями: расстановка шахматных фигур, бьющих каждую клетку доски, покрытие клетчатого поля фигурами сложной конфигурации и т.п.

Предлагаемые алгоритмы

Для решения задачи (1) в рамках предлагаемой статьи были опробованы следующие пять алгоритмов.

1. Точный алгоритм бинарного программирования с использованием программы bintprog. Этот алгоритм основан на методе ветвей и границ и в качестве *релаксационной задачи* [3] применяет задачу обычного линейного программирования (ЛП), решаемую двойственным симплекс-методом.

2. Жадный алгоритм, описанный в [3], и основанный на следующей эвристике: на каждом шаге в графе $G = (V, E)$ выбирается вершина максимальной степени, т.е. доминирующая над наибольшим числом смежных вершин. В результате имеем следующий алгоритм:
Шаг 1. Первоначально множество D (текущее доминирующее множество) полагается пустым.
Шаг 2. Пока $V \neq \varnothing$ выбрать в G вершину максимальной степени. Выбранная вершина вместе со своими рёбрами удаляется из G и добавляется в D.

Этот алгоритм можно использовать как для построения вершинного покрытия, так и доминирующего множества. В [3] показано, что при решении задачи о минимальном вершинном покрытии, алгоритм имеет теоретически неограниченную относительную погрешность. Иными словами, если обозначить F^{opt} и $F^{прибл}$ – значения целевой функции в точном и приближённом решении, соответственно, то при любой константе $K > 0$ можно предложить задачу о минимальном вершинном покрытии, для которой решение, полученное жадным алгоритмом, удовлетворяет условию

$$\frac{F^{прибл} - F^{opt}}{F^{opt}} > K.$$

Для задачи о наименьшем ДМ таких данных найти не удалось, однако, при тестировании этого алгоритма максимальная наблюдаемая относительна погрешность составила 30%, что достаточно много.

3. Алгоритм локальных вариаций. Это приближённый метод, предложенный в [4] для решения задач целочисленного и булевого программирования. Он основан на последовательном улучшении решения за счёт поиска лучшего варианта в локальной окрестности некоторой начальной точки x^0. В качестве условия, ограничивающего размер окрестности, предложено $\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - x_i^0\right| \le r$ при небольшом значении r = 1, 2, 3. Для булевских переменных в данную окрестность должны входить все точки, отличающиеся от текущего центра x^0 не более чем r координатами. Каждый раз при нахождении лучшей точки в неё переносится центр окрестности и поиск продолжается. Если при максимальном r лучший вариант не будет найден – алгоритм заканчивает работу, текущий центр считается решением.

Нетрудно заметить, что эффективность алгоритма во многом зависит от удачного выбора начальной точки, при везении можно найти точное решение. Поэтому теоретические оценки качества алгоритма отсутствуют и его можно проверить только тестированием.

4. Алгоритм экстраполяции [5]. Модификация этого алгоритма была использована для построения рационального ветвления в методе ветвей и границ. Суть алгоритма состоит в разбиении области допустимых решений задачи ЛП на примерно одинаковые по объёму области и продолжении решения на всю область.

5. Модифицированный жадный алгоритм, – метод предложенный авторами работы. Он основан на следующей эвристике. Недостаток обычного жадного алгоритма в том, что на начальном этапе он выбирает все хорошие точки, а в конце вынужден «проводить зачистку», т.е. добирать оставшиеся вершины с малыми степенями.

Авторы предлагают несколько начальных вершин задавать принудительно, независимо от их степени, а последующие вершины выбирать в соответствии с жадной стратегией. Выбирать начальные вершины можно случайно и проделать такие пробы достаточно много раз, порядка 1000 попыток.

Тестирование показало, что этот алгоритм обладает достаточно высоким быстродействием и из всех рассмотренных алгоритмов, за исключением № 1, позволяет достичь максимальной точности. Для иллюстрации приведём решение известной задачи о расстановке пяти ферзей на шахматной доске (рисунок 2).

Эта задача имеет матрицу размера 64×64. Программа bintprog не нашла решения за 30 минут работы, а модифицированный жадный алгоритм нашёл за 4 секунды.

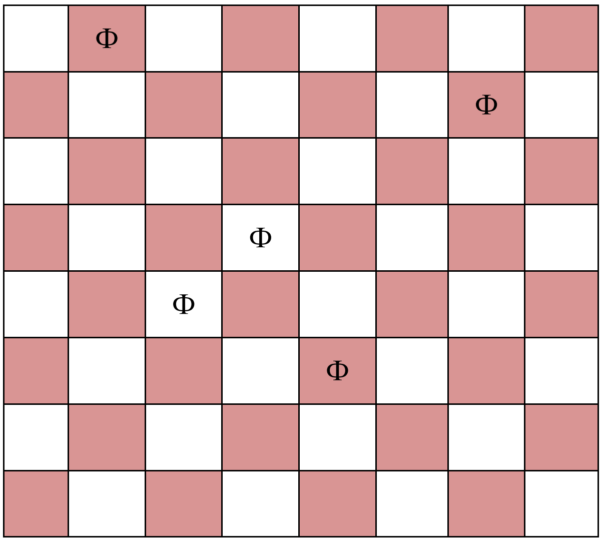

Рисунок 2. Тестовый пример: пять ферзей, бьющих все клетки шахматной доски

Figure 2. Test Example: Five queens beating all the cells of the chessboard

Заключение

Для решения практических задач рекомендуется использование комбинации методов № 5 и № 1. Последний рекомендуется для контроля. Сначала используется алгоритм № 5, затем – № 1. Если за приемлемое время № 1 не найдёт точного решения, то выбирается решение, полученное модифицированным жадным алгоритмом. Также для ручного подбора решения в случае сложной конфигурации диаграммы направленности, антенны излучателя и для поиска начальных приближений можно в диалоговом режиме применять алгоритм № 4 экстраполяции из [5].

ЛИТЕРАТУРА

1 Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов: Учебник для вузов. 3-е изд. / Ф. А. Новиков. СПб: Питер, 2009. – 374 с.

2 Заозерская Л. А. Исследование и решение двухкритериальной задачи о покрытии множества / Л. А. Заозерская, А. А. Колоколов // Проблемы информатики. 2009. № 1. С. 14–23.

3 Дасгупта С. Алгоритмы / С. Дасгупта, Х. Пападимитриу, У. Вазирани // Пер. с англ. М.: МЦНМО, 2014. – 320 с.

4 Иванов Б. Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. Расширенный курс / Б. Н. Иванов. М.: Известия, 2011. – 512 с.

5 Бугаев Ю. В. Приближенный метод синтеза моделей выбора на основе экстраполяции экспертных оценок / Ю. В. Бугаев, И. Е. Медведкова, Б. Е. Никитин, А. С. Чайковский / Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2009. Т. 15. № 4. С. 766–776.

REFERENCES

1 F. A. Novikov Discrete mathematics for programmers. SPb, Piter, 2009 -374 p. (Russian)

2 L. A. Zaozerskaya Investigation and solving two-criterion problem of set cover / L. A. Zaozerskaya, A. A. Kolokolov // Problems of computer science, No. 1, 14-23, 2009. (Russian)

3 Dasgupta, S. Algorithms / S. Dasgupta, H. Papadimitriou, U. Vazirani // TRANS. angl. M.: MCCME, 2014. – 320 p.

4 B. N. Ivanov Discrete mathematics. Algorithms and programs. Advanced course / B. N. Ivanov. Moscow: Izvestia, 2011. – 512 p. (Russian)

5 Y. V. Bugaev Approximate method of synthesis of models of selection on the basis of extrapolation of expert estimates / Y. V. Bugaev, I. E. Medvedkova, B. E. Nikitin, A. S. Tchaikovsky / Bulletin of Tambov state technical University. 2009. T. 15. No. 4. P. 766-776. (Russian)

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Юрий В. Бугаев д.ф.-м.н, профессор, кафедра информационных технологий моделирования и управления, Воронеж. гос. ун-т инж. техн., пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394000, Россия, y_bugaev52@mail.ru

Светлана Н. Черняева к.т.н., доцент, кафедра информационных технологий моделирования и управления, Воронеж. гос. ун-т инж. техн., пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394000, Россия, chernsv1978@gmail.com

Оксана Ю. Ойцева ст. пр., кафедра информационных технологий моделирования и управления, Воронеж. гос. ун-т инж. техн., пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394000, Россия, oou@live.ru

Артем И. Коробов магистр, кафедра информационных технологий моделирования и управления, Воронеж. гос. ун-т инж. техн., пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394000, Россия, korobovartyom13@gmail.com

КРИТЕРИЙ АВТОРСТВА

Юрий В. Бугаев предложил методику проведения

Светлана Н. Черняева обзор литературных источников по исследуемой проблеме, выполнила расчёты

Оксана Ю. Ойцева консультация в ходе исследования

Артем И. Коробов написал рукопись, корректировал её до подачи в редакцию и несёт ответственность за плагиат

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ПОСТУПИЛА 18.04.2016

ПРИНЯТА В ПЕЧАТЬ 16.05.2016

INFORMATION ABOUT AUTHORS

Yuri V. Bugaev d. p.-m. sc., professor, information simulation technology and management department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394000, Russia,y_bugaev52@mail.ru

Svetlana N. Chernyaeva c. e. sc., assistant professor, information simulation technology and management department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394000, Russia, chernsv1978@gmail.com

Oytceva Y. Oksana senior lecturer, information simulation technology and management department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394000, Russia,oou@live.ru

Artem I. Korobov master student, information simulation technology and management department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394000, Russia, korobovartyom13@gmail.com

CONTRIBUTION

Yuri V. Bugaev proposed a scheme of the experiment

Svetlana N. Chernyaeva review of the literature on an investigated problem

Oytceva Y. Oksana consultation during the study

Artem I. Korobov wrote the manuscript, correct it before filing in editing and is responsible for plagiarism

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare no conflict of interest.

RECEIVED 4.18.2016

ACCEPTED 5.16.2016