Оригинальная статья/Original article
УДК 517.951
DOI: http://doi.org/10.20914/2310-1202-2016-2-65-68

Нестационарное температурное поле в параллелепипеде в режиме теплопроводности при граничных условиях первого рода

Виталий К. Битюков, [1] president@vsuet.ru
Анатолий А. Хвостов, [2] khvtol1974@yandex.ru
Александра В. Сумина [3] vsum@rambler.ru

[1] кафедра информ. и управл. систем, Воронеж. гос. ун т. инж. технол., пр-т Революции, 19, г. Воронеж, Россия
[2] кафедра математики, ВУНЦ ВВС «ВВА им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», ул. Старых Большевиков, 54, г. Воронеж,
[3] факультет прикладной математики, информатики и механики, Воронеж. гос. ун-т., Университетская пл. 1, г. Воронеж

Реферат. Аналитическое изучение процессов теплопроводности является одним из основных разделов современных инженерных исследований в машиностроительной, энергетической, атомной промышленности, в технологических процессах химической, строительной, текстильной, пищевой, геологической и других отраслях промышленности. Достаточно указать, что практически все процессы в той или иной степени связаны с изменением температурного состояния и переносом теплоты. Следует также отметить, что инженерные исследования кинетики множества физических и химико-технологических процессов аналогичны задачам стационарной и нестационарной теплопроводности. К ним можно отнести процессы диффузий, седиментации, вязкого течения, замедления нейтронов, течения жидкостей через пористую среду, электрические колебания, сорбции, сушки, горения и др. Существуют различные методы решения классических краевых задач нестационарной теплопроводности и задач обобщённого типа: метод разделения переменных (метод Фурье); метод продолжений; метод произведения решений; метод Дюамеля; метод интегральных преобразований; операционный метод; метод функции Грина (для нестационарной и стационарной теплопроводности); метод отражения (метод источников). В данной работе на основе последовательного применения преобразования Лапласа по безразмерному времени θ и конечного интегрального синус-преобразования по пространственным координатам X и Y решается задача нестационарного распределения температуры по механизму теплопроводности в параллелепипеде при граничных условиях первого рода. В результате получено аналитическое решение задачи распределения температуры в параллелепипеде для кондуктивного режима свободной конвекции, когда одна из боковых граней параллелепипеда поддерживается при постоянной температуре, а остальные при другой одинаковой постоянной температуре.

Ключевые слова: аналитическое решение, конечные интегральные преобразования, теплопроводность, граничные условия первого рода

Nonstationary thermal field in the parallelepiped in the mode of heat conduction under boundary conditions of first kind

Vitaly K. Bityukov, [1] president@vsuet.ru
Anatoly A. Khvostov, [2] khvtol1974@yandex.ru
Alexandra V. Sumina, [3] vsum@rambler.ru

[1] Department of information and control systems, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia
[2] mathematic department, MESC AF «N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh), Staryh Bolshevikov str., 54, Voronezh
[3] Faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics,Voronezh State University, 1 Universitetskaya pl., Voronezh, Russia

Summary. Analytical study of the processes of heat conduction is one of the main topics of modern engineering research in engineering, energy, nuclear industry, process chemical, construction, textile, food, geological and other industries. Suffice to say that almost all processes in one degree or another are related to change in the temperature condition and the transfer of warmth. It should also be noted that engineering studies of the kinetics of a range of physical and chemical processes are similar to the problems of stationary and nonstationary heat transfer. These include the processes of diffusions, sedimentation, viscous flow, slowing down the neutrons, flow of fluids through a porous medium, electric fluctuations, adsorption, drying, burning, etc. There are various methods for solving the classical boundary value problems of nonstationary heat conduction and problems of the generalized type: the method of separation of variables (Fourier method) method; the continuation method; the works solutions; the Duhamel's method; the integral transformations method; the operating method; the method of green's functions (stationary and non-stationary thermal conductivity); the reflection method (method source). In this paper, based on the consistent application of the Laplace transform on the dimensionless time θ and finite sine integral transformation in the spatial coordinates X and Y solves the problem of unsteady temperature distribution on the mechanism of heat conduction in a parallelepiped with boundary conditions of first kind. As a result we have the analytical solution of the temperature distribution in the parallelepiped to a conductive mode free convection, when one of the side faces of the parallelepiped is maintained at a constant temperature, and the others with the another same constant temperature.

Keywords: Analytical solution, finite integral transform, heat conduction, boundary conditions of first kind.

Для цитирования
Битюков В. К., Хвостов А. А., Сумина А. В. Нестационарное температурное поле в параллелепипеде в режиме теплопроводности при граничных условиях первого рода // Вестник ВГУИТ. 2016. № 2. С. 65–68. doi:10.20914/2310-1202-2016-2-65-68

For citation
Bityukov V. K., Khvostov A. A., Sumina A. V. Nonstationary thermal field in the parallelepiped in the mode of heat conduction under boundary conditions of first kind. *Vestnik VSUET* [Proceedings of VSUET]. 2016. No. 2. pp. 65–68 (in Russ.). doi:10.20914/2310-1202-2016-2-65-68

Введение

При анализе кондуктивно-ламинарной свободной конвекции в замкнутых объёмах уравнения Обербека–Буссинеска могут быть представлены в несопряжённом виде [1]. Для плоских и осесимметричных геометрий в [2, 3] имеется множество решённых задач теплопроводности, но следует отметить, что анализ пространственных постановок представлен недостаточно. В [4] приведены методы получения аналитических решений, однако метод конечных интегральных синус-преобразований является наиболее эффективным [5].

В связи с этим, на примере области в форме параллелепипеда при граничных условиях первого рода демонстрируется алгоритм получения аналитического решения с помощью преобразования Лапласа по временной переменной и конечного интегрального синус-преобразования по геометрическим координатам.

Рассматривается задача нестационарного распределения температуры по механизму теплопроводности в параллелепипеде при граничных условиях первого рода.

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\lambda}{\rho c_p}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right); \quad (1)$$

$$t(0,y,z,\theta)=t_1; t(x,y,z,0)=0; \quad (2)$$

$$t(h_1,y,z,\theta)=t(x,0,z,\theta)=t(x,h_2,z,\theta)= = t(x,y,0,\theta)=t(x,y,h_3,\theta)=0. \quad (3)$$

Введём безразмерные координаты:

$$X=\frac{x}{h_1}; Y=\frac{y}{h_2}; Z=\frac{z}{h_3}; a=\frac{\lambda}{\rho c_p};$$

$$A=\frac{h_1}{h_2}; B=\frac{h_1}{h_3}; \theta=\frac{a\tau}{h_1^2}; T=\frac{t}{t_1},$$

тогда система (1)–(3) примет следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}=\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}+A^2\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}+B^2\frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}; \quad (4)$$

$$T(X,Y,Z,0)=1; T(X,Y,Z,0)=0; \quad (5)$$

$$T(1,Y,Z,\theta)=T(X,0,Z,\theta)=T(X,1,Z,\theta)= = T(X,Y,0,\theta)=T(X,Y,1,\theta)=0. \quad (6)$$

Применение преобразования Лапласа по безразмерному времени θ переводит (4)–(6) в систему для изображения

$$T_L(X,Y,Z,s)=L^{-1}[T(X,Y,Z,\theta)]$$

$$\frac{d^2T}{\partial X^2}+A^2\frac{d^2T_L}{\partial Y^2}+B^2\frac{d^2T_L}{\partial Z^2}=sT_L; \quad (7)$$

$$T_L(0,Y,Z,s)=\frac{1}{s}; \quad (8)$$

$$T_L(1,Y,Z,s)=T_L(X,0,Z,s)=T_L(X,1,Z,s)= = T_L(X,Y,0,s)=T_L(X,Y,1,s)=0. \quad (9)$$

Применение конечного интегрального синус-преобразования по безразмерной координате Y :

$$F_Y[T_L(X,Y,Z)]=F_Y(X,Z)=\int_0^1 T(X,Y,Z)\sin(\mu Y)dY,$$

где μ – корни уравнения $\sin\mu=0$; с учётом того, что

$$F_Y\left[\frac{d^2T_L}{dY^2}\right]=-\mu^2\Phi_{Y;}F_Y\left[\frac{d^2T_L}{dX^2}\right]=\frac{d^2\Phi_Y}{dX^2};$$

$$F_Y\left[\frac{d^2T_L}{dZ^2}\right]=\frac{d^2\Phi_Y}{dZ^2};$$

$$F_Y[1]=-\frac{1}{\mu}(\cos\mu-1);$$

$$F_Y\left[s^{-1}\right]=-\frac{1}{\mu s}(\cos\mu-1);$$

переводит исходную задачу в изображение:

$$\frac{d^2\Phi_Y}{dX^2}+B^2\frac{d^2\Phi_Y}{dZ^2}-\left(A^2\mu^2+s\right)\Phi_Y=0; \quad (10)$$

$$\Phi_Y(0,Z,s)=-\frac{1}{\mu s}(\cos\mu-1); \quad (11)$$

$$\Phi_Y(1,Z,s)=\Phi_Y(X,0,s)=\Phi_Y(X,1,s)=0. \quad (12)$$

Повторное применение синус-преобразования по безразмерной координате Z преобразует систему (10)–(12) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{d^2\Phi_{YZ}}{dX^2}-\left(B^2\gamma^2+A^2\mu^2+s\right)\Phi_{XY}=0; \quad (13)$$

$$\Phi_{XY}(0,s)=-\frac{(\cos\mu-1)(\cos\gamma-1)}{\mu\gamma s}; \quad (14)$$

$$\Phi_{YZ}(1,s)=0. \quad (15)$$

Решение (13)–(15) таково:

$$\Phi_{YZ}(X,s)=-\frac{2(\cos\mu-1)(\cos\gamma-1)}{\mu\gamma}\times \times\frac{sh\sqrt{B^2\gamma^2+A^2\mu^2+s}\,(x-1)}{s*sh\left(2\sqrt{B^2\gamma^2+A^2\mu^2+s}\right)}. \quad (16)$$

Применим обратное преобразование Лапласа. Для этого воспользуемся теоремой Ващенко–Захарченко [2]:

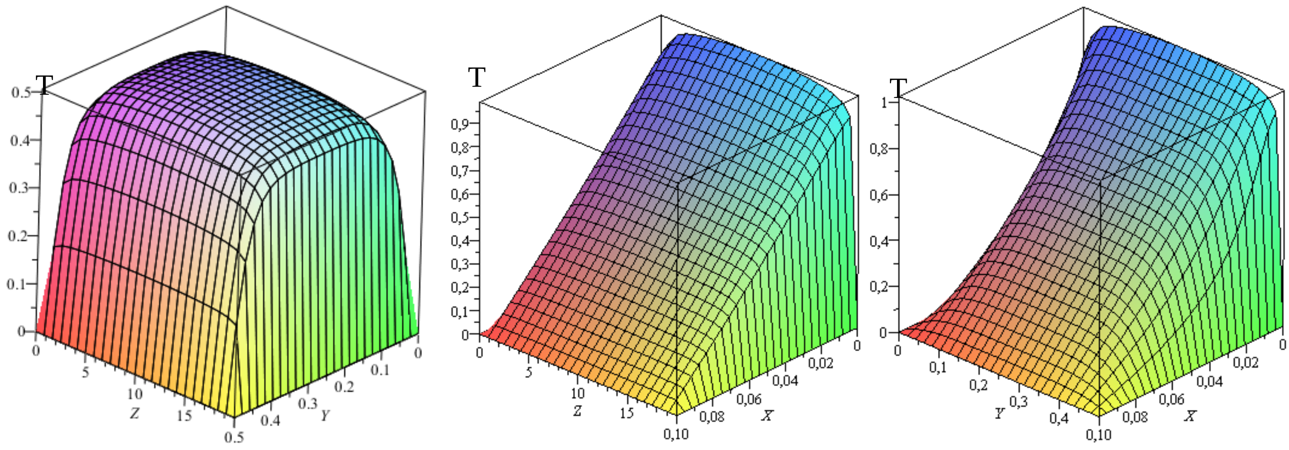
$$L^{-1}\left[\frac{\varphi(X,\mu,\gamma,s)}{\psi(\mu,\gamma,s)}\right]=\frac{\varphi(X,\mu,\gamma,0)}{\psi(\mu,\gamma,0)}+ +\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi(X,\mu,\gamma,s_n)}{\psi(\mu,\gamma,s_n)}\times\exp(s_n\theta).$$

В нашем случае:

$$L^{-1}\left[\frac{\phi(X,\mu,\gamma,s)}{\psi(\mu,\gamma,s)}\right]=-\frac{2(\cos\mu-1)(\cos\gamma-1)}{\mu\gamma}\times$$
$$\times\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{sh\sqrt{B^2\gamma^2+A^2\mu^2}\,(x-1)}{sh\left(2\sqrt{B^2\gamma^2+A^2\mu^2}\right)}+\\[2ex] +2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k\sin\left[\dfrac{\beta_k(X-1)}{2}\right]}{\left(\beta_k^{\,2}+4B^2\gamma^2+4A^2\mu^2\right)\cos\beta_k}\times\\[2ex] \times\exp\left[\left(-\dfrac{\beta_k}{4}-B^2\gamma^2-A^2\mu^2\right)*\theta\right]\end{array}\right\rangle, \quad (17)$$

где β_k – корень уравнения $\sin\beta_k=0$. Переходя последовательно к оригиналу в (17), получим окончательное решение (рисунок 1):

$$T(X,Y,Z,\theta)=-8\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{(\cos\mu_m-1)(\cos\gamma_n-1)}{\mu_m^2\gamma_n^2}\times$$
$$\times\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{sh\sqrt{B^2\gamma^2+A^2\mu^2}\,(x-1)}{sh\left(2\sqrt{B^2\gamma^2+A^2\mu^2}\right)}+\\[2ex] +2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k\sin\left[\dfrac{\beta_k(X-1)}{2}\right]}{\left(\beta_k^{\,2}+4B^2\gamma^2+4A^2\mu^2\right)\cos\beta_k}\times\\[2ex] \times\exp\left[\left(-\dfrac{\beta_k}{4}-B^2\gamma^2-A^2\mu^2\right)*\theta\right]\end{array}\right\rangle\times \quad (18)$$
$$\times\sin(\mu_m Y)\times\sin(\gamma_n Z)$$



(a) (b) (c)

Рисунок 1. Распределение температур при фиксированных значениях $h_1=0{,}1$; $h_2=0{,}5$; $h_3=20$; $\theta=1$ и: a) $X=0{,}05$; b) $Y=0{,}25$; c) $Z=0{,}25$

Figure 1. Temperature distribution at fixed values $h_1=0{,}1$; $h_2=0{,}5$; $h_3=20$; $\theta=1$ и: a) $X=0{,}05$; b) $Y=0{,}25$; c) $Z=0{,}25$

Заключение

В работе продемонстрировано применение конечного-интегрального преобразования для получения решения поставленной задачи новой структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Latif M. Heat convection. New York: Springer, 2009. 552 p.

2. Цветков Ф. Ф., Григорьев Е. А. Тепломассообмен. М.: Изд-во МЭИ, 2011. 550 с.

3. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2011. 256 с.

4. Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. V. 2. Partial differential equatins. Singalore: Wiley – VCH, 1989. 896 p.

5. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с.

6. Duffy D. G. Transform methods for solving partial differential equations, second edition. Chapman and Hall/CRC, 2004

REFERENCES

1 Latif M. Heat convection. New York, Springer, 2009. 552p.

2 Tsvetkov F. F., Grigoriev E. A. Teplomassoobmen [Heat and mass transfer] Moscow, MEI, 2011. 550 p. (in Russian).

3 Polyanin A. D., Zaitsev V. F., Zhurov A. I. Metody resheniya nelineinykh uravnenii matematicheskoi fiziki i mekhaniki [Methods of solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2011. 256 p. (in Russian).

4 Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. V. 2. Partial differential equatins. Singalore, Wiley – VCH, 1989. 896 p.

5 Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Spravochnik po nelineinym uravneniyam matematicheskoi fiziki [Handbook of nonlinear equations of mathematical physics: Exact solutions]. Moscow, Fizmatlit, 2002. 432 p. (in Russian).

6 Duffy D. G. Transform methods for solving partial differential equations, second edition. Chapman and Hall/CRC, 2004

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Виталий К. Битюков д.т.н., профессор, президент, Воронеж. гос. ун-т. инж. техн., пр-т Революции, 19, г. Воронеж, Россия, president@vsuet.ru

Анатолий А. Хвостов д.т.н., профессор, кафедра математики, ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж), ул. Старых Большевиков, 54 «А», г. Воронеж, Россия, khvtol1974@yandex.ru

Александра В. Сумина студент, факультет прикладной математики, информатики и механики, Воронеж. гос. ун-т., Университетская пл. 1, г. Воронеж, vsum@rambler.ru

INFORMATION ABOUT AUTHORS

Vitaly K. Bityukov D. t. sc., professor, president, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, Russia, president@vsuet.ru

Anatoly A. Khvostov D. t. sc., professor, mathematic department, MESC AF «N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh), Staryh Bolshevikov street, 54 «A», Voronezh, Russia, khvtol1974@yandex.ru

Alexandra V. Sumina student, Faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics,Voronezh State University, 1 Universitetskaya, Voronezh, Russia, vsum@rambler.ru

КРИТЕРИЙ АВТОРСТВА

Анатолий А. Хвостов обзор литературных источников по исследуемой проблеме, провёл эксперимент, выполнил расчёты

Виталий К. Битюков консультация в ходе исследования

Александра В. Сумина написала рукопись, корректировала её до подачи в редакцию и несёт ответственность за плагиат

CONTRIBUTION

Anatoly A. Khvostov review of the literature on an investigated problem, conducted an experiment, performed computations

Vitaly K. Bityukov consultation during the study

Alexandra V. Sumina wrote the manuscript, correct it before filing in editing and is responsible for plagiarism

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare no conflict of interest.

ПОСТУПИЛА 24.03.2016

ПРИНЯТА В ПЕЧАТЬ 21.04.2016

RECEIVED 3.24.2016

ACCEPTED 4.21.2016