УДК: 637.1:65.011.56

Профессор А.А. Хвостов, доцент Д.И. Ребриков,
аспирант В.Е. Мерзликин
(Воронеж. гос. ун-т. инж. технол.) кафедра информационных и управляющих систем.
тел. (473) 255-38-75
E-mail: rebrikov-vgta@vgta.vrn.ru

Professor A.A. Khvostov, associate Professor D.I. Rebrikov,
graduate V.E. Merzlikin
(Voronezh state university of engineering technologies) Department of information and control systems. phone (473) 255-38-75
E-mail: rebrikov-vgta @vgta.vrn.ru

Идентификация массовых распределений жировой фазы в молоке с помощью универсальных распределений Пирсона

Identification of the mass distributions of the milk fat phase using universal Pearson distributions

Реферат. В работе рассмотрена задача по аппроксимации экспериментальных значений коэффициента затухания ультразвуковых колебаний и массовых распределений жировых шариков в молоке и молочных продуктах. Произведен анализ экспериментальных данных с точки зрения выбора метода аппроксимации. Предложена аппроксимирующая зависимость, которая основана на решении дифференциального уравнения Пирсона. Рассмотрены преимущества предложенного метода аппроксимации с учетом вида получаемых экспериментальных данных. Разработан алгоритм построения математической модели, описывающей спектр времен релаксации и массовых распределений жировых шариков в молоке и молочных продуктах. В результате аппроксимации семейством кривых Пирсона экспериментальных данных показана возможность качественно верно описать изменение распределения жировой фазы в ходе процесса гомогенизации. Оценена погрешность аппроксимирующей зависимости, которая составила 18 %. Показано, что с ходом процесса гомогенизации молочных продуктов изменяется вид кривой, описывающей распределение жировых шариков, в виду того, что появляется локальный экстремум, вызванный наличием части негомогенизированных жировых шариков. При этом точность выбранной математической модели резко снижается. Вместе с этим, теряется физический смысл и её параметров. Для устранения выявленных отклонений в работе предложено массовое распределение жировых шариков рассматривать как функцию с двумя модами. Обосновано, что усложнение модели не только увеличивает в два раза количество её параметров, но и усложняет интерпретацию результатов измерений в системе управления и делает сложным анализ получаемых параметров аппроксимации лицом, принимающим решение. По результатам аппроксимации экспериментальных данных и по их виду предложено использовать статистические моменты распределения для решения поставленной задачи.

Summary. In this paper we consider the problem of approximating the experimental values of the coefficient of attenuation of ultrasonic oscillations and the mass distribution of the fat globules in the milk and milk products. The analysis of experimental data in terms of the choice of the method of approximation was done. A approximating dependence is based on the solution of Pearson differential equations. The advantages of the proposed method for the type of approximation of the experimental data obtained. An algorithm for constructing a mathematical model describing the relaxation spectrum and mass distribution of the fat globules in the milk and milk products was implemented. As a result, a family of Pearson approximation curves of the experimental data shows the ability to qualitatively correctly describe the change in the distribution of the fat phase in the process of homogenization. It estimates the error of approximating dependence, which amounted to 18 %. It is shown that during of the process of homogenization of dairy products changes shape of the curve describing the distribution of the fat globules, in view of the fact that there is a local extremum, caused by the presence of the non-homogenized fat globules. The accuracy of the selected mathematical model is significantly reduced. At the same time, it loses its physical meaning and its parameters. To address the identified deviations in the proposed mass distribution of fat globules as a function with two modes. It is proved that the complexity of the model is not only doubles the number of its parameters, but also complicates the interpretation of measurement results in a control system, and makes it difficult to analyze the obtained parameters of approximation by decision-maker. As a result of approximation of experimental data suggested to use statistical moments of the distribution for problem decision.

Ключевые слова: молочные продукты, акустические свойства, массовое распределение, аппроксимация, распределение Пирсона.

Keywords: dairy products, acoustic properties, distribution of mass, approximation, Pearson distributions.

© Хвостов А.А., Ребриков Д.И., Мерзликин В.Е., 2015

Использование связи значений масс распределения жировых шариков по массовым или объемным фракциям [1, 2] со спектром времен релаксации молока от акустических свойств раствора [3] при параметрической идентификации представляет трудности по следующим причинам:

– число точек $H(\tau)$ ограничено количеством их измерений;

– разная разрешающая способность по массе и частоте усложняет сопоставление точек, полученных экспериментально, на кривых релаксационного спектра и распределения масс жировых шариков по массовым или объемным фракциям с релаксационным спектром молока;

– вероятное увеличение случайной ошибки без фильтрации исходных данных.

То есть необходима аппроксимация экспериментальных значений $H(\tau)$ и распределения жировой фазы. Рассмотрим синтез аппроксимирующей зависимости на примере массового (объемного) распределения жировой фазы в молоке. Поскольку полная функция распределения начинается с нулевого значения и заканчивается нулевым значением, проходит через один или несколько максимумов и при этом вид спектра заранее неизвестен, то для его аппроксимации можно использовать решения дифференциального уравнения Пирсона [4, 5]:

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau} = \frac{\tau + a}{b_0 + b_1\tau + b_2\tau^2} \cdot H(\tau), \qquad (1)$$

где a, b_0, b_1, b_2, — постоянные.

Общее решение этого уравнения может быть представлено в виде:

$$H(\tau) = H_0 e^{-\int \frac{(\tau+a)d\tau}{b_0+b_1\tau+b_2\tau^2}} \qquad (2)$$

Параметры a, b_0, b_1, b_2, определяются по методу моментов:

$$\begin{cases} a = \mu_3\left(\mu_4 + 3\mu_2^2\right)/A, \\ b_0 = -\mu_2\left(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2\right)/A, \\ b_1 = -\mu_3\left(\mu_4 + 3\mu_2^2\right)/A, \\ b_2 = -\left(2\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2 - 6\mu_2^3\right)/A, \\ A = 10\mu_2\mu_4 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2, \end{cases} \qquad (3)$$

где μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 – первые четыре центральных момента распределения измеряемой величины:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (\tau_i - \mu_1)^k \cdot H(\tau_i), \qquad (4)$$

где k – порядок рассматриваемого момента; n – количество экспериментальных точек.

Структура решения дифференциального уравнения (1) зависит от полученных корней ψ_1, ψ_2 уравнения [5]:

$$b_0 + b_1\tau + b_2\tau^2 = 0 \qquad (5)$$

Для проверки корней данного уравнения вводится параметр:

$$æ = \frac{b_1^2}{4b_0b_2} \qquad (6)$$

Величина æ называется критерием Пирсона (каппа Пирсона) и ее значения определяют следующие свойства корней уравнения:

– Если $æ < 0$, уравнение (2) имеет действительные корни разных знаков.

– Если $0 < æ < 1$, уравнение (2) имеет комплексные корни.

– Если $æ > 1$, уравнение (2) имеет действительные корни одного знака.

Всем этим вариантам Пирсон ставит в соответствие три основных типа своих кривых, которые он назвал кривыми I, IV и VI типа. Также æ может принимать значения $0, 1, \pm\infty$, что дает переходные типы кривых. Всего семейство кривых Пирсона включает 12 типов, плюс нормальную кривую.

Имея рассчитанный параметр æ, можно определить вид кривой, аппроксимирующей экспериментальные данные.

В случае нескольких основных времен релаксации согласно принципу суперпозиции релаксационных процессов в молоке суммарная функция $f(T,\omega)$ будет аппроксимироваться взвешенной суммой функций плотности в двумерном виде:

$$f(T,\omega) = \sum_{i=1}^{N} \xi_i f_i(T,\omega), \qquad (7)$$

где i – номер рассматриваемого релаксационного процесса, N – количество рассматриваемых релаксационных процессов, ξ_i – весовой коэффициент для i-го релаксационного процесса в общие механические потери.

Таким образом, алгоритм, с помощью которого осуществляется построение математической модели, которая описывает спектр времен релаксации в молоке, будет выглядеть следующим образом (рисунок 1):

1. Разделение множества всех экспериментально точек в плоскости (T,ω) на подмножества, соответствующие отдельным выборкам и относящиеся к конкретному релаксационному механизму.

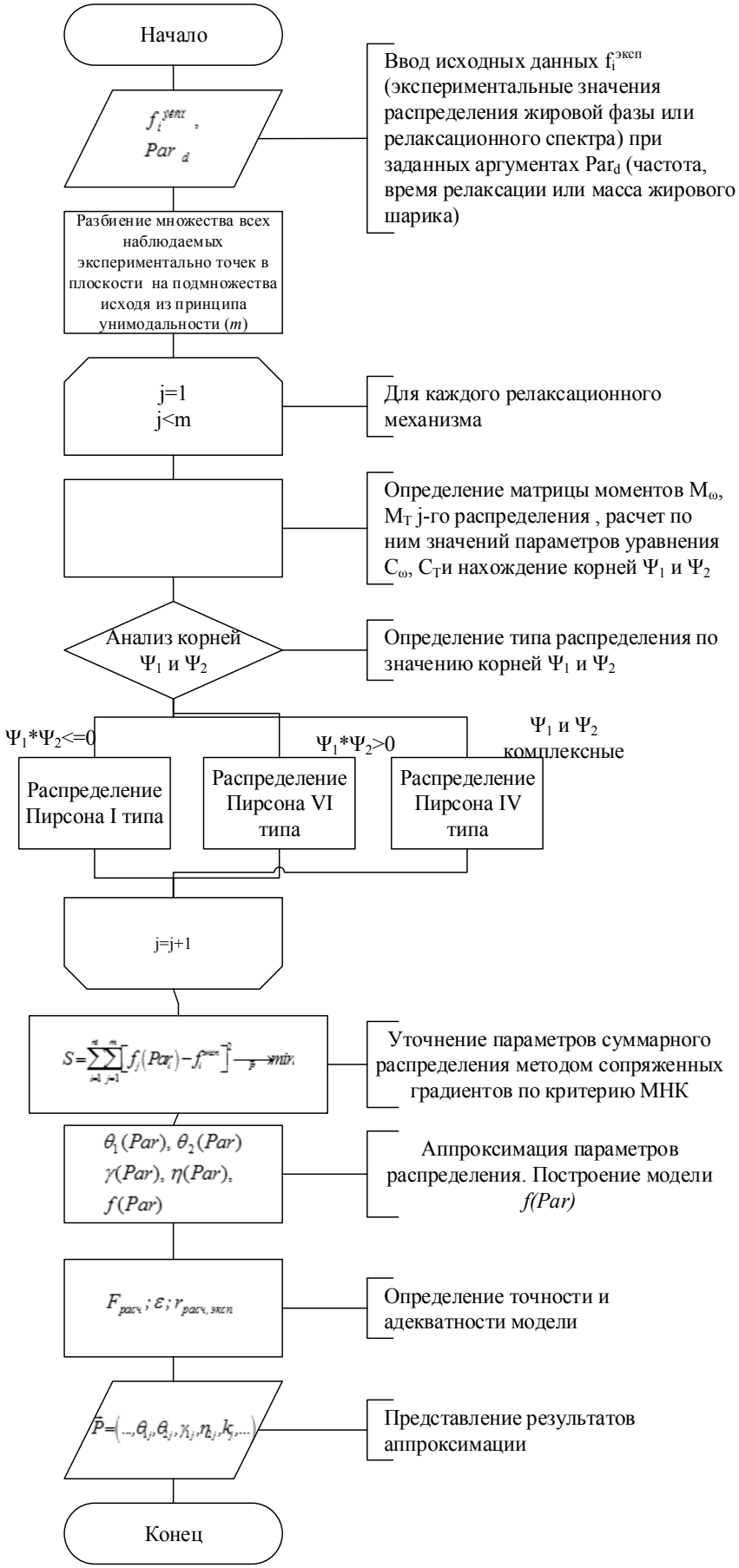


Рисунок 1. Алгоритм построения математической модели

2. Создание из множества экспериментальных точек, соответствующих каждому механизму релаксации, подмножеств экспериментальных точек, связанных с фиксированным частотам или температурам, для создания выборок условных распределений по частотам и температурам.

3. Приведение к нормированным значениям для расчета выборочных моментов условных распределений.

4. Расчет выборочных моментов M_ω, M_T условных распределений.

5. Расчет коэффициентов квадратного уравнения в знаменателе (1) C_ω, C_T и вычисление его корней ψ_ω, ψ_T.

6. Выбор типа распределения из семейства универсальных распределений Пирсона.

7. Расчет параметров распределения $\overline{\gamma}_\omega, \overline{\gamma}_T, \overline{\eta}_\omega, \overline{\eta}_T$.

8. Дополнительное уточнение коэффициентов суммарного многомодального распределения с помощью метода покоординатного спуска по среднеквадратичному критерию и начальными приближениями, полученными на этапе 7.

9. Оценка адекватности и точности модели.

По проведенным экспериментальным исследованиям установлено, что полученные корни уравнения (2) – вещественные числа разных знаков. Поэтому для моделирования спектра времен релаксации необходимо использовать бета-распределение первого рода:

$$H(\tau) = \frac{y(\tau)^{s_1} \cdot (1 - y(\tau))^{s_2}}{k \cdot B(s_1, s_2)}, \qquad (8)$$

где s1, s2 – параметры рассматриваемого распределения; y(τ) - аргумент; B(s1,s2) - значение полученной бета-функции.

Параметры для распределения вычисляются по формулам:

$$s_1 = \frac{c_1 - a}{B_2\left(c_1 + c_2\right)}, \qquad (9)$$

$$s_2 = \frac{c_2 - a}{B_2\left(c_1 + c_2\right)}.$$

Аргумент распределения можно определить по формуле:

$$y(\tau) = \frac{\tau - \theta_1}{\theta_2}, \qquad (10)$$

где $\theta_1 = \mu_1 - c_1$, $\theta_2 = c_1 + c_2$.

Для того чтобы идентифицировать параметры модели релаксационного спектра был использован среднеквадратичный критерий:

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(H(\tau_i)^{эксп} - H(\tau_i)^{расч}\right)^2 \longrightarrow \xrightarrow[s_1, s_2, k, \theta_1, \theta_2]{} \min \qquad (11)$$

При проведении экспериментальных исследований использовано 42 образца молока с различным массовым распределением жировой фазы вследствие проведения процедуры гомогенизации при разных давлениях.

Необходимо заметить, что в процессе параметрической идентификации использованы предварительно нормированные данные эксперимента. Переход от абсолютных значений H(τ) к нормированным вызван тем, что площадь под кривой распределения жировой фазы должна быть равна 1, однако условие $\int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} H(\tau)d\tau = 1$ не выполняется, поэтому для дальнейшего расчета массового распределения жировой фазы по спектру времен релаксации необходимо осуществить нормировку исходных данных.

Для чего необходимо соблюдение следующего условия:

$$\sum_{i=1}^{N} H\left(\tau_i\right) = 1, \qquad (12)$$

где N – количество точек измерения.

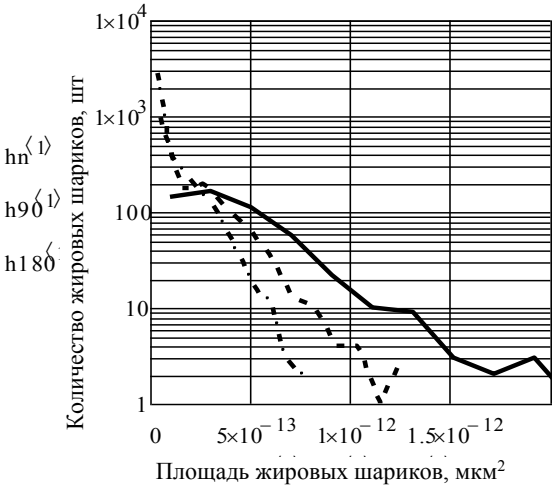
Для чего необходимо осуществить введение дополнительного нормирующего коэффициента $k_{норм}$, который обеспечивает выполнение равенства (4):

$$k_{норм} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} H\left(\tau_i\right)} \qquad (13)$$

При дальнейших расчетах используемые экспериментальные значения спектра времен релаксации подразумеваются как нормированные значения.

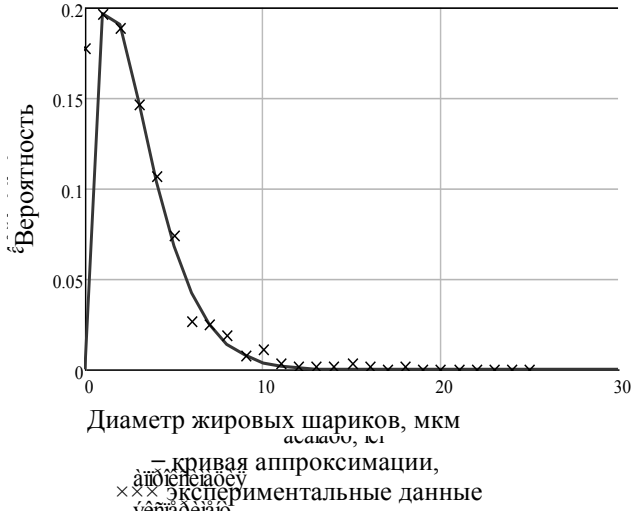
На рисунке 2 представлены экспериментальные значения распределений жировой фазы молока до процесса гомогенизации и при разных давлениях проведения процесса. Приведенные данные показывают увеличение содержания низкоразмерных фракций с увеличением давления гомогенизации.

Аппроксимация семейством кривых Пирсона с использованием зависимости структуры (3) позволила качественно верно описать изменение распределения жировой фазы в ходе процесса гомогенизации (рисунки 3, 4, 5). Из представленных графиков видно, что в начале процесса гомогенизации вид распределения имеет ярко выраженный экстремум, благодаря чему распределение можно считать унимодальным. В этом случае математическая модель на основе кривых Пирсона с приемлемой погрешностью (порядка 18%) описывает распределение жировой фазы.



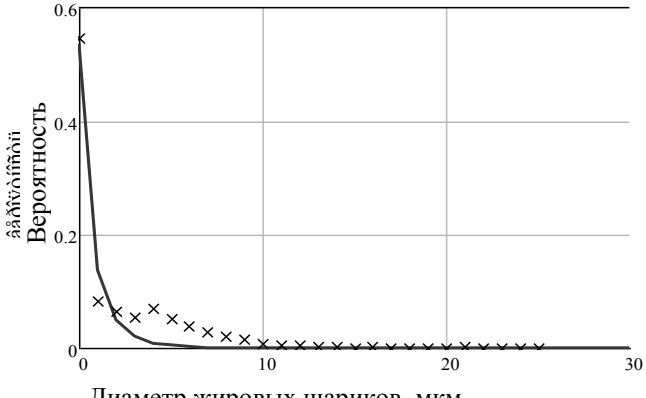
– – негомогенизированное молоко,
- . - . - – гомогенизированное при давлении 90 и 180 МПа, соответственно

Рисунок 2. Сравнительные распределения жировых шариков в объеме пробы по диаметру



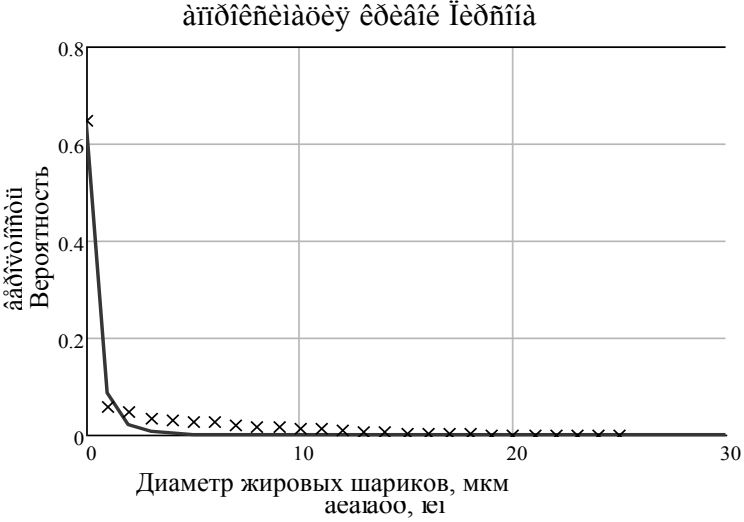
– кривая аппроксимации,
××× экспериментальные данные

Рисунок 3. Аппроксимация экспериментальных данных распределения жировых шариков негомогенизированного молока ДУ Пирсона



– кривая аппроксимации,
××× экспериментальные данные

Рисунок 4 Аппроксимация экспериментальных данных распределения жировых шариков гомогенизированного молока при давлении 90 МПа ДУ Пирсона.



– кривая аппроксимации,
××× экспериментальные данные

Рисунок 5. Аппроксимация экспериментальных данных распределения жировых шариков гомогенизированного молока при давлении 180 МПа ДУ Пирсона

Однако в ходе процесса гомогенизации вид кривой распределения изменяется, и экстремум смещается к левой границе области определения функции распределения фазы по размерам. Кроме этого, ввиду наличия как гомогенизированной, так и негомогенизированной части в общем объеме начинает проявляться остаток негомогенизированного молока в виде небольшого локального экстремума. В этом случае для того, чтобы достигнуть приемлемого уровня отклонений модельных данных от экспериментальных в математическую модель приходится вводить вторую моду. Такое усложнение модели не только увеличивает в два раза количество её параметров, но и усложняет интерпретацию результатов измерений в системе управления и ЛПР.

Проведенные исследования показали возможность качественного описания изменения объемного (массового) распределения жировой фазы в молочных продуктах с использованием семейства распределений Пирсона. Для более точного описания необходимо вводить в математическую модель описание второй моды или использовать описание функции распределения статистическими моментами.

ЛИТЕРАТУРА

1 Крусь Г.Н. и др. Технология молока и молочных продуктов. М.: Колосс, 2003. 315 с.

2 Kress-Rogers E., Brimelow C. J. B. Instrumentation and sensors for the food industry. Second edition. Abington: Woodhead Publishing Limited, 2000.

3 Honerkamp J. et al. Determination of the relaxation time spectrum from dynamic module using an edge preserving regularization method // Rheologica Acta. 2000. V. 39. № 2. P. 163–173.

4 Крамер Г.Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. 658 с.

5 Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. М.: Наука, 1966. 588 с.

REFERENCES

1 Krus' G.N. et al. Tekhnologiya moloka i molochnykh produktov [Technology of milk and dairy products]. Moscow, Koloss Publ, 2003, 315 p. (In Russ.).

2 Kress-Rogers E., Brimelow C. J. B. Instrumentation and sensors for the food industry. Second edition. Abington: Woodhead Publishing Limited, 2000.

3 Honerkamp J. et al. Determination of the relaxation time spectrum from dynamic module using an edge preserving regularization method. Rheologica Acta, 2000, vol. 39, no. 2, pp. 163–173.

4 Kramer G.Matematicheskie metody statistiki [Mathematical methods of statistics]. Moscow, Mir, 1975, 658 p. (In Russ.).

5 Kendall M., Stuart A. Teoriya raspredelenii [Theory of distributions]. Moscow, Nauka, 1966, 588 p. (In Russ.).